Werner Kratz
Marius Hofert

Universität Ulm
Wintersemester 2008/2009
22.01.2009

Übungen zur Analysis 2

Blatt 14

Abgabe und Besprechung, Donnerstag, den 29.01.2009

Aufgabe 63 (6 Punkte)

Die *Lemniskate* ist die Kurve im $\mathbb{R}^2$ mit der Parameterdarstellung

$$\binom{x(t)}{y(t)} = \sqrt{|\cos(2t)|}\,\binom{\cos t}{\sin t}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

(a) Skizziere die Kurve und berechne den Flächeninhalt des von der Kurve eingeschlossenen Bereichs.

(b) Zeige, dass die Punkte $\binom{x}{y}$ auf der Lemniskate die Gleichung $(x^2+y^2)^2 = |x^2 - y^2|$ von Bernoulli erfüllen.

Aufgabe 64 (3 Punkte)

Berechne das n-dimensionale Volumen des *Simplex*

$$M = \Big\{ x \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; 0 \le x_\nu \text{ für } \nu = 1, \dots, n \text{ und } \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \le 1 \Big\}.$$

Skizziere M für $n = 2, 3$.

Aufgabe 65 (3 Punkte)

M_1 und M_2 seien Jordan-messbare Teilmengen des $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass $M_1 \cup M_2$ und $M_1 \cap M_2$ Jordan-messbar sind, und dass gilt $|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$.

Aufgabe 66 (4 Punkte)

Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist M eine Lebesguesche Nullmenge, genau dann wenn gilt: M ist Jordan-messbar und $|M| = 0$.

Aufgabe 67 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) (4 Punkte)

Beweise den *Mittelwertsatz der Integralrechnung*:
Es seien $M \subset \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und zusammenhängend, $f : M \to \mathbb{R}$ beschränkt und stetig auf M. Dann gibt es ein $\xi \in M$ mit $\int_M f = f(\xi)|M|$.

`http://www.mathematik.uni-ulm.de/m5/mhofert/ana2/`